ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצא מטריצה אופיינית.

ב. מצא פולינום אופייני.

ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצא וקטורים עצמיים.

ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP=D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשב A^{2009}.

ט. מצא את הפולינום המינימלי.

י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-6** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.

במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.

כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP=D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

פתור פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **7-11** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

7) $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

12) נתון $A=\begin{pmatrix}k-2 & 2k & k+1\\ k-1 & -1 & 2\\ -k & 0 & -6\end{pmatrix}$.

לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?

13) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix}a & b & b\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -8 & -5\end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערכי a ו- b, עבורם הערכים העצמיים של A יהיו **1** ו-**-1** **<u>בלבד</u>**.

ב. עבור ערכי a ו- b שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

14) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-4$.

מצא את המטריצה A.

15) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3, בעלת וקטורים עצמיים $v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1, \lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.
במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

16) הוכח או הפרך:
א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.
ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.
ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.
ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו״ע שלה השייך לע״ע 14.

17) נתונה מטריצה ריבועית A. הוכח או הפרך:
א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.
ב. אם A הפיכה ו-λ ע״ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.
ג. ל-A ול-A^T יש את אותו פולינום אופייני.
ד. ל-A ול-A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.
ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע״ע של A.
ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע״ע של A, אז $\lambda=\pm1$.
ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע״ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

18) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו-B, מסדר n. הוכח או הפרך:
א. ל-AB ו-BA אותם ערכים עצמיים.
ב. נניח ש-v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו-B,
אז v הוא גם וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

19) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.
א. הוכיחו כי לכל סקלר k, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.
ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A, מצא את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

20) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3. ידוע כי v_1,v_2 הם ו"ע, שונים מאפס, של A, המתאימים לע"ע $\lambda=1$, וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda=-1$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות:

א. אם הווקטורים v_1,v_2 בת"ל, אז $A^{2018}=I$.

ב. A ניתנת ללכסון.

ג. v_3 הוא צרוף לינארי של הווקטורים v_1,v_2.

21) נתונות שתי מטריצות מסדר n: מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה.
הוכח או הפרך:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

22) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n, שעבורן v הוא ו"ע.

א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n.

ב. עבור $v=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $n=2$, מצאו בסיס ל- W.

23) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכח ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשב את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכח ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

24) תהי $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, כאשר a קבוע.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. עבור איזה ערך של a, הזוג $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A.

ג. יהי $0\neq u\in\mathbb{R}^2$ וקטור שאינו וקטור עצמי של A.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

25) תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$ כך ש-$AB=BA$.
נניח כי $rankA=n-1$, ו-v הוא וקטור עצמי של המטריצה A,
השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכח כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

26) פתור את 2 הסעיפים הבאים:
א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.
1. הוכח כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-$p(x)=x^2-tr(A)x+|A|$.
2. נתון כי $tr(A)=4$. חשב את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה
יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של A.
הוכח כי $a_{n-1}=-tr(A)$, $a_0=(-1)^n|A|$.

27) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $rank(B)=1$.
הוכח:
א. 0 ע"ע של המטריצה B.
ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0, הוא 3.
ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0, הוא 3 או 4.
ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.
ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0, אז הוא שווה ל-$tr(B)$.

28) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר n.
ידוע כי $rank(B)=k$ כאשר $k<n$.
הוכח כי ערך 0 עצמי של B ומצא את הריבוי
הגיאומטרי והאלגברי שלו.

29) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי שונה מ-0.
הוכח שהמטריצה ניתנת ללכסון.

30) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A^TA (הנח $n>1$).

31) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.
א. הוכח כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.
ב. רשום את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.
ג. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים.
ד. הוכח כי A ניתנת ללכסון.
ה. הוכח כי $tr(A)=rankA$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5.
הוכח או הפרך:
א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u \mid Au=\alpha u\}$ של R^5, כך ש-$\dim W_\alpha \geq 1$.
ב. אם u_1,u_2 ו"ע של A, אז גם הווקטור u_1+u_2 ו"ע של A.
ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.
ד. אם A לכסינה מעל R, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.
ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R.

33) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכח כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצא את כל הערכים העצמיים שלה.

34) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4 שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש:
א. $rank(A)=4$
ב. A לכסינה.
ג. $tr(A)>10$
ד. $|A|\leq 127$
ה. קיים וקטור עצמי v של A, כך ש-$A^2v=2v$.

35) תהי A מטריצה מסדר 3, המקיימת $0 < rank(A-10I) < rank(A-4I) < 3$.

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה A.

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A, ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבע האם A הפיכה.

ד. האם נכון לומר ש- $A = 10I$, או ש- $A = 4I$?

ה. קבע האם A לכסינה.

36) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.

הוכח או הפרך:

א. אם v וקטור עצמי של A, אז v וקטור עצמי גם של A^n.

ב. אם v וקטור עצמי של A^n, אז v וקטור עצמי גם של A.

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

37) נתונה מטריצה A, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x) = (x-1)^2$.

הוכח כי המטריצה $A^2 + 4A + 3I$ הפיכה.

38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x) = x^2 + bx + c$.

מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A \in M_2[R]$ מקיימת $|A| < 0$.

הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג.

$x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle,\ \langle 1,0,1\rangle,\ \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוי אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוי אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוי אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v_{x=3}^{(2)}=(1,1,0),\ v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

12) $k_1=3,\ k_2=-\frac{32}{9}$

13) א. $a=3,\ b=-4$ או $a=1,\ b=0$ ב. לא לשתיהן.

14) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

15) אין כזו מטריצה.

16) א. הפרכה: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. ב. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ ג. $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ ד. הוכחה.

17) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.
ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.

18) א. הוכחה. ב. הוכחה.

19) א. הוכחה. ב. $4+k$ הוא ערך עצמי של $A+kI$.

20) א. הפרכה. ב. הוכחה. ג. הפרכה.

21) א. הפרכה. ב. הוכחה.

22) א. הוכחה. ב. הוכחה.

23) א. הערך העצמי הוא 260. ב. הוכחה.

24) א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

25) הוכחה

26) א.1. הוכחה. א.2. $|A|=4$ ב. הוכחה.

27) הוכחה.

28) הוכחה.

29) הוכחה.

30) 0 ו- $tr(A)$.

31) א. הוכחה. ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$ ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. הוכחה.

32) הוכחה.

33) הערכים העצמיים הם: $0,1,-1$.

34) הוכחה.

35) א. $p(x)=(x-10)^2(x-4)$
ב. 10 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 2;
4 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 1.
ג. לא הפיכה. ד. לא. ה. לכסינה.

36) הוכחה.

37) הוכחה.

38) א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$ ב. הוכחה.

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש-A ו-B מטריצות דומות. הוכח כי:

א. $|A|=|B|$

ב. $tr(A)=tr(B)$

ג. ל-A ו-B אותו פולינום אופייני.

2) הוכח באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$.
הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 7 & 0\\ 9 & -17 & 6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a & b & b\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -8 & -5\end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a, b, כך שהמטריצה A דומה למטריצה B?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n: A, B, C. הוכח כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל-B, אז B דומה ל-A.

ג. אם A דומה ל-B ו-B דומה ל-C, אז A דומה ל-C.

ד. אם A דומה ל-B ושתיהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל-B^{-1}.

ה. אם A דומה ל-B, אז A^k דומה ל-B^k, לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל-B ו-$q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל-$q(B)$.

ז. אם A דומה ל-B, אז A^T דומה ל-B^T.

ח. אם A דומה ל-B, אז $rank(A)=rank(B)$.

ט. אם A דומה ל-B, אז $nullity(A)=nullity(B)$.

הערה – $nullity(A)=$ מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

6) הוכח או הפרך :

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשב כל אחד מהבאים או הסבר מדוע לא ניתן לעשות זאת :

א. $rank(A)$ ב. $\dim Ker(A)$ ג. $tr(A)$

ד. $|A^T A|$ ה. ע"ע עבור $A^T A$. ו. ע"ע עבור $(4A^2+10A+I)^{-1}$.

הערה – $\dim KerA = nullity(A)$

8) הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) לא.

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

8) הוכחה.

העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-15**, קבע, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה ליניארית:

1) $T:R^2 \to R^2 \quad ; \quad T(x,y)=(x+y,x-y)$

2) $T:R^3 \to R^3 \quad ; \quad T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)$

3) $T:R^3 \to R^2 \quad ; \quad T(x,y,z)=(2x+z,|y|)$

4) $T:R^2 \to R^3 \quad ; \quad T(x,y)=(xy,y,x)$

5) $T:R^3 \to R^3 \quad ; \quad T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)$

6) $T:M_n[R]\to M_n[R] \quad ; \quad T(A)=BA+AB \quad \left(B\in M_n[R]\right)$

7) $T:M_n[R]\to M_n[R] \quad ; \quad T(A)=A+A^T$

8) $T:M_n[R]\to M_n[R] \quad ; \quad T(A)=|A|\cdot I$

9) $T:M_n[R]\to M_n[R] \quad ; \quad T(A)=A\cdot A^T$

10) $T:M_n[R]\to M_n[R] \quad ; \quad T(A)=A^{-1}$

11) $T:P_3[R]\to P_2[R] \quad ; \quad T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2$

12) $T:P_n[R]\to P_n[R] \quad ; \quad T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

13) $T:P_n[R]\to P_n[R] \quad ; \quad T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)$

14) $T:P_n[R]\to P_{2n}[R] \quad ; \quad T\left(p(x)\right)=p^2(x)$

15) $T:C[F]\to C[F] \quad ; \quad T\left(z\right)=\overline{z} \quad \left(F=C,F=R\right)$

16) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית:
$T:R^2 \to R^2 \quad ; \quad T(x,y)=\left(m^2x^{2m}, y^{2m}+x\right)$?

בשאלות **17-20**, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

17) $T:R^3 \to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(7,8,9)$, $T(0,1,1)=(4,5,6)$, $T(1,1,0)=(1,2,3)$.

18) $T:R^3 \to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(0,1,1)$, $T(0,1,1)=(1,2,1)$, $T(1,0,1)=(1,1,0)$.

19) $T:R^4 \to R^3$ כך ש- $T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$, $T(-1,0,1,1)=(1,0,0)$, $T(1,2,-1,0)=(0,1,-1)$.

20) $T:P_2[R] \to P_2[R]$ כך ש- $T(1-x)=x^2+1$, $T\left(4x+x^2\right)=x$, $T(1)=4$.

21) נתונה העתקה לינארית $T:R^3 \to R^3$, המקיימת:
$$T(1,0,0)=(a_1,a_2,a_3)$$
$$T(0,1,0)=(b_1,b_2,b_3)$$
$$T(0,0,1)=(c_1,c_2,c_3)$$

א. הוכח שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ב. נסח והוכח טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T:R^n \to R^m$.

22) נתונה העתקה לינארית $T:V \to V$.
הוכח או הפרך:

א. אם $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

1) כן	**2)** כן	**3)** לא	**4)** לא	**5)** כן
6) כן	**7)** כן	**8)** לא	**9)** לא	**10)** לא
11) כן	**12)** כן	**13)** כן	**14)** לא	**15)** לא
16) כן	**17)** כן	**18)** כן	**19)** כן	**20)** כן
21) הוכחה.		**22)** הוכחה.		

גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצא:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

1) $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)\ ,\ T:R^4\to R^3$

2) $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)\ ,\ T:R^3\to R^4$

3) $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\ ,\ T:R^4\to R^3$

4) $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A\ ,\ T:M_2[R]\to M_2[R]$

5) $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)\ ,\ T:P_2[R]\to P_2[R]$

6) $D\left(p(x)\right)=p'(x)\ ,\ D:P_3[R]\to P_3[R]$

7) מצא העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

8) מצא העתקה ליניארית $T:R^4\to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

9) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to U$.
הוכח כי אם $\dim \operatorname{Im}T=\dim KerT$, אז הממד של V זוגי.

10) הוכח או הפרך:

א. קיימת העתקה ליניארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $KerT=\operatorname{Im}T$.

ב. קיימת העתקה ליניארית $T:R^4\to R^4$ שעבורה $KerT=\operatorname{Im}T$.

11) ידוע שהעתקה לינארית $T:V\rightarrow W$,
מקיימת: $\dim W=4$, $\dim \operatorname{Im}T=\dim KerT$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V?

א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

12) הוכח או הפרך:

א. לכל העתקה לינארית $T:V\rightarrow V$ מתקיים $\operatorname{Im}T^2\subseteq \operatorname{Im}T$.
ב. לכל העתקה לינארית $T:V\rightarrow V$ שמקיימת:
$KerT=KerT^2$, $\operatorname{Im}T=\operatorname{Im}T^2$, מתקיים $T=T^2$.
ג. לכל העתקה לינארית $T:V\rightarrow V$, המקיימת $\operatorname{Im}T\subseteq KerT$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

13) מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\rightarrow R^m$; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\rightarrow R^n$; $S(y)=A^Ty$.
הראה כי $\operatorname{Im}T=\left(KerS\right)^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

3) גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

4) גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

5) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=2x+5 \quad , \quad p(x)=1\}$, מימד: 2.

6) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=x^2, \quad p(x)=x, \quad p(x)=1\}$, מימד: 3.

7) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&4&1\\4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

8) $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבע האם היא <u>חח"ע</u>,[1] האם היא <u>על</u>,
האם היא <u>איזומורפיזם</u> והאם קיימת <u>העתקה הפוכה</u>.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצא אותה.

1) $T:R^3 \to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3 \to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R] \to R^3 \quad , \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R] \to P_3[R] \quad , \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

5) האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4 \to R^3$?

6) נתונה העתקה ליניארית $T:U \to V$.
הוכח:
א. אם $\dim U < \dim V$, אז T לא על.
ב. אם $\dim U > \dim V$, אז T לא חח"ע.
ג. אם $\dim U = \dim V$, אז T חח"ע $\Leftrightarrow$ T על.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:V \to W$.
הוכח או הפרך:
א. אם $\dim KerT \neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.
ב. אם $\dim KerT = 0$ ו- $\dim V \leq \dim W$, אז ההעתקה T היא על.
ג. אם $\dim KerT = 0$ ו- $\dim V \geq \dim W$, אז ההעתקה T היא על.
ד. אם $\dim V < \dim W$, אז ההעתקה T חח"ע.

[1] הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V.
הוכח או הפרך:
א. אם $\dim V>\dim W$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח"ע.
ב. אם $\dim V>\dim W$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל.

9) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$.
$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- V.
הוכח או הפרך:
א. אם T חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- W.
ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- W, אז T חח"ע.

10) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$.
הוכח או הפרך:
א. אם T היא איזומורפיזם אז $m=n$.
ב. אם $m>n$, אז T חח"ע.
ג. אם $T(v)=Av$ לכל v, אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}T=KerT$.
הוכח או הפרך:
א. אם T על, אז בהכרח $V=\{0\}$.
ב. אם T חח"ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.
ג. T היא איזומורפיזם.
ד. T היא העתקת האפס.

12) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכח או הפרך:
א. אם $v\in KerT$, אז $v\in \mathrm{rowsp}(A)$.
ב. אם $v\in \mathrm{rowsp}(A)$, אז $v\in KerT$.
ג. אם $v\in \mathrm{colsp}(A)$, אז $v\in \operatorname{Im}T$.
ד. אם $KerT=\{0\}$, אז $n<m$.

13) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n \to R^n$, ונתונה מטריצה A,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v \in R^n$.
הוכח את הטענות הבאות:

א. אם $rank(A)=n$, אז T חח"ע.

ב. אם $rank(A)=n$, אז T על.

ג. אם $T^2(v)=0$, אז $\mathrm{Im}T \subseteq KerT$.

ד. אם $T^2(v)=0$, אז $rank(A) \le \frac{n}{2}$.

14) נתונה העתקה ליניארית $T:P_3[R] \to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x))=p(1)$.

א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענה על הסעיפים הקודמים עבור $T:P_n[R] \to R$.

15) נתונה העתקה ליניארית $T:M_n[R] \to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A)=A^T$.

א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצא את ההעתקה ההפוכה של T.

תשובות סופיות

1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

5) לא.

6) הוכחה.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

14) א. $KerT=span\left\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\right\},\ \dim KerT=3$

$\operatorname{Im}T=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}T=1$

ב. לא חח"ע, כן על.

ג. $KerT=span\left\{-1+x,-1+x^2,\dots,-1+x^n\right\},\ \dim KerT=n$

$\operatorname{Im}T=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}T=1$

לא חח"ע, כן על.

15) א. $\operatorname{Im}T=M_n[R]$, $KerT=\left\{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\}$ ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$

פעולות עם העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3 \to R^2$ ו- $T:R^3 \to R^3$ העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$, $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** TS **5)** ST

6) T^2 **7)** T^{-1} **8)** T^{-2} **9)** S^2

תשובות סופיות

1) לא ניתן להגדיר.

2) $4S=4(x-z,y)$

3) לא ניתן להגדיר.

4) לא ניתן להגדיר.

5) $ST:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

6) $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

7) $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

8) $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

9) לא ניתן להגדיר.

מטריצה שמייצגת העתקה

הערה:
כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת-מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים).
לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

שאלות

1) נתונים שני בסיסים של R^3:

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונה העתקה ליניארית: $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.

נתונים שני בסיסים של R^3:

$B_1=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$, $B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1.
סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשר את הטענות הבאות:

1. $[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}$

2. $[T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}$

3. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[T]_{B_1}\cdot[M]_{B_1}^{B_2}=[T]_{B_2}$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

3) נתונה העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,

היא $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$.

מהי נוסחת ההעתקה? פתור בשתי דרכים שונות.

4) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3, ויהי T אופרטור ליניארי על R^3.

נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1&-9&6\\1&6&-4\\1&5&-2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29&-45&6\\20&31&-4\\13&19&-1\end{pmatrix}$.

חשב את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

5) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}A$,

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

6) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D: P_4[R] \to P_4[R]$, $D\left(p(x)\right) = p'(x)$,
לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

7) נתונה העתקה ליניארית $T: M_2[R] \to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא: $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T: P_2[R] \to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,
היא: $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

9) נתונה העתקה ליניארית $T: P_2[R] \to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B = \left\{1, 1-x, x+x^2\right\}$,
היא: $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
א. מצא את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצא את $T\left(p(x)\right)$.
* פתור בשתי דרכים שונות.
ב. מצא את $T^2\left(p(x)\right)$.

10) תהי $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית, ותהי A מטריצה ממשית,
כך שמתקיים $T(v) = Av$ לכל $v \in \mathbb{R}^n$.
נתון כי B בסיס ל-$\mathbb{R}^n$ ו-$rank(A) = n$.
הוכח כי $[T]_B$ הפיכה.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:P_3[R]\to P_3[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. מצא את נוסחת ההעתקה.

12) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בבסיס הסטנדרטי,
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. חשב את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.

ג. מצא את נוסחת ההעתקה.

13) נתונה העתקה ליניארית: $T:P_2[R]\to P_2[R]\ ;\ T(a+bx+cx^2)=b+cx$.
הוכח ש- T העתקה נילפוטנטית.

14) יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.
נתון הבסיס $B=\{1,x,x^2\}$. ונתונה ההעתקה הליניארית
$T:V\to V\ ;\ T\big(p(x)\big)=xp''(x)-p'(x)$.

א. מצא את המטריצה המייצגת $[T]_B$.

ב. מצא בסיסים וממדים עבור $\operatorname{Im}T, KerT$.
הערה – בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין
והתמונה, היות שנוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

15) נתונות שתי העתקות לינאריות $S,T:V\to V$.

יהי $B=\{u,v,w\}$ בסיס ל- V.

נתון כי: $\begin{cases} T(u)=u-v \\ T(v)=v-w \\ T(w)=w-u \end{cases}$, $\begin{cases} S(u)=u+v \\ S(v)=v+w \\ S(w)=w+u \end{cases}$.

א. הוכח כי: $KerS=\{0\},\ KerT\neq\{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבע האם $\{T(u),T(v),T(w)\}$ פורשת את V.

ד. קבע האם $\{S(u),S(v),S(w)\}$ פורשת את V.

תשובות סופיות

1) א. $(x, y-x-z, z)$ ב. $(x, y, z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $[T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

ד. לא. ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.

3) $T(x,y,z) = (x+y, y+z, z-x)$

4) $[T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -0.75 & 2.75 & 0.5 \end{pmatrix}$, $[M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0.5 \\ -0.25 & -1 & 0.75 \end{pmatrix}$

5) $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **6)** $[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7) $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

8) $T:P_2[R] \to P_2[R]$; $T(p(x)) = p(x+1)$

9) א. $T(a+bx+cx^2) = (a+2b-2c)+(2a+4c)x+(2a+b+2c)x^2$

ב. $T^2(a+bx+cx^2) = (a+2c)1+(10a+8b+4c)x+(8a+6b+4c)x^2$

10) הוכחה.

11) א. $Ker(T) = sp\{-x+x^3, -1+x^2\}$, $\mathrm{Im}(T) = sp\{1+x^2, x+x^3\}$

ב. $T(a+bx+cx^2+dx^3) = (b+d)(1)+(a+c)x+(b+d)x^2+(a+c)x^3$

12) א. $Ker(T) = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Im}(T) = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

ב. $tr(T) = 15$, $\det(T) = 0$, $rank(T) = 2$

13) הוכחה.

14) א. $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $B_{\mathrm{Im}T} = \{1\}$, $\dim(\mathrm{Im}\,T) = 1$

$B_{KerT} = \{1, x^2\}$, $\dim(KerT) = 2$

15) הוכחה.

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

שאלות

1) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הליניאריות הבאות, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n:

א. $T:R^2 \to R^3$, $T(x,y)=(x+y,y+z,z-x)$

ב. $T:R^4 \to R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$

2) נתונה העתקה ליניארית $T:R^4 \to R^2$; $T(x,y,z,t)=(x+y,z+t)$
מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של R^4 לבסיס הסטנדרטי של R^2.

3) תהי $T:R^3 \to R^2$ העתקה ליניארית המוגדרת על ידי:
$T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$
חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס
$B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ של R^3, לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2.
כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

4) עבור העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$,
כאשר: $B_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$, $B_1=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$
מצא את נוסחת ההעתקה.

5) עבור העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
כאשר $B_2=\{(1,1),\ (1,2)\}$, $B_1=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (0,0,1)\}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

6) נתונה העתקה ליניארית $T:P_3[R] \to P_2[R]$.
המטריצה שמייצגת את ההעתקה T, מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$
לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי: $[T]=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$ אשר המטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

9) תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, כך ש- $\dim(V)=n$, ויהיו B_1,B_2 בסיסים סדורים של V. הוכח או הפרך:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$

ב. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$.

ג. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_2}[T]_{B_2}^{B_1}=I_n$.

10) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$ המוגדרת על ידי: $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$.

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}(a,b,c)$.

ג. חשב את $T^4\left(a+bx+cx^2\right)$.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)$.

12) חשב את ST ואת TS, עבור ההעתקות:

$S:R^2\to R^3 \quad ; \quad S(x,y)=(x-y,x+y,y)$

$T:P_2[R]\to R^2 \quad ; \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b,b-c)$

תשובות סופיות

1) א. $[T]=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $[T]=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) $[T]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $[T]=\begin{pmatrix} 25 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

4) $T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5y+6z)$

5) $T(x,y,z)=(x+y,y+z)$

6) $T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=(b+2c)1+(2c+6d)x+(3d)x^2$

7) $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$

8) $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

9) הוכחה.

10) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $T^{-1}(a,b,c)=(a-b+c)1+(b-c)x+cx^2$

ג. לא ניתן.

11) א. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$

12) $ST\left(a+bx+cx^2\right)=(a+c,a+2b-c,b-c)$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה לינארית

שאלות

1) נתונה העתקה לינארית, $T:M_2(R)\to M_2(R)$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.
מצאו את קבוצת כל המטריצות P, שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
היא וקטור עצמי של ההעתקה.
הוכיחו כי קבוצת המטריצות לעיל היא ת״מ של $M_2(R)$ ומצאו לה בסיס.

2) נתונה העתקה לינארית, $T:M_{10}(R)\to M_{10}(R)$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי A היא מטריצה הפיכה שמהווה וקטור עצמי של
ההעתקה המתאים לערך העצמי 4.
חשב את $|P|$.

3) מצא העתקה לינארית T, שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,
היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(4x-y-z,x+2y-z,x-y+2z)$
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה לינארית: $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.
מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

5) נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(x+z,y,x+z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה שכן חשב $T^{2009}(x,y,z)$.

6) נתונה העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad ; \quad T: M_2[R] \to M_2[R]$$

א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה ותשובתך לסעיף ג' חיובית, חשב את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

7) נתונה העתקה לינארית: $T: P_2[R] \to P_2[R] \quad ; \quad T(p(x)) = p(x+1)$

א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8) יהי V מרחב וקטורי ממימד n.

תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית.

א. הוכח ש- T הפיכה אמ"ם כל הערכים העצמיים של T שונים מאפס.

ב. הוכח כי אם T הפיכה, אז ל-T ול- T^{-1} יש את אותם וקטורים עצמיים.

מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של T ושל T^{-1}?

תשובות סופיות

1) $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in R \right\}$

2) $4^{10} = |P|$

3) $T: M_{2x3}(R) \to M_{2x3}(R) \quad T(X) = 4X$

4) א. $v^{(2)}_{\lambda=3} = (1,0,1)$, $v^{(1)}_{\lambda=3} = (1,1,0)$, $v_{\lambda=2} = (1,1,1)$, ניתנת לליכסון.

ב. ערך עצמי: $x = 0$, וקטור עצמי: $v_{x=0} = (1,-1,1)$, לא.

5) $v_{\lambda=2} = (1,0,1)$, $v_{\lambda=1} = (0,1,0)$, $v_{\lambda=0} = (-1,0,1)$ ב. ניתנת ללכסון.

ג. $T^{2009}(x,y,z) = \left(2^{2008}x + 2^{2008}z, y, 2^{2008}x + 2^{2008}z\right)$

6) א. $[T]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $v^{(2)}_{x=2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v^{(1)}_{x=2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)}_{x=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v^{(1)}_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ג. כן. ד. $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9x + 2^9z & 2^9y + 2^9t \\ 2^9x + 2^9z & 2^9y + 2^9t \end{pmatrix}$

7) א. $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $v_{\lambda=1} = 1$ ג. לא ניתנת לליכסון.

8) הוכחה.

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:
$<u,v>=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2$.
בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:
$<u,v>=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$, ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:
$<u,v>=x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$, ב- $\mathbb{R}^n$,
נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\ldots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.
הראה כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.
מהי המכפלה המתקבלת עם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

5) לכל שתי מטריצות A,B, ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $<A,B>tr\left(B^TA\right)$.
בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.
tr מייצג את המילה $trace$ (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות f,g ב- $C[a,b]$, נגדיר: $<f,g>=\int_a^b f\cdot g dx$.
בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

7) נתונה מכפלה פנימית על R^3, שעבורה הקבוצה
$B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשב את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים
$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.

2) $k>9$

3) $-1<k<1$

4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.

6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

7) $$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^n$, חשב:

א. $<u,v>$ ב. $<u,w>$ ג. $<v,w>$ ד. $<u+v,w>$ ה. $\|u\|$

ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $d(u,v)$ ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2\times3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $<A,B>=tr\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times3}[R]$,

חשב:

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle A,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,\ 11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $d(A,B)$ ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ \ q(x)=3x+1,\ \ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$,

חשב:

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\langle\|p\|\rangle$ ה. $d(p,q)$ ו. $\hat{r}$

4) הוכח: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2<u,v>+\|v\|^2$.

5) הוכח: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2<u,v>+\|v\|^2$.

6) הוכח: $<u-v,u+v>=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכח: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכח: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=<u,v>$.

תשובות סופיות

1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24
ה. -3168 ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח.
ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833
ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$ ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

1) הוכח כי $|<u,v>|=\|u\|\cdot\|v\|$, אם ורק אם u,v תלויים לינארית.

2) יהיו $x_1,x_2,\dots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\dots,y_n$ מספרים ממשיים.

הוכח כי $(x_1,y_1+x_2,y_2+\dots+x_n,y_n)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2\right)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.

הוכח כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

4) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u=(1,2,2),\ \ v=(-2,1,2)$,

ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

5) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u=(3,4),\ \ v=(1,2)$,

ביחס למכפלה הפנימית $\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$, ב- $\mathbb{R}^2$.

6) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x)=2x-1$ ו- $q(x)=x^2$,

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$ שב- $C[0,1]$.

7) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&3\end{pmatrix}$,

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times2}[R]$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) $\theta = 63.61^\circ$
5) $\theta = 9.44^\circ$
6) $\cos\theta = 0.173^\circ$
7) $\cos\theta = 0.00036^\circ$

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכח כי הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(4,7,-6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצא את ערכו של הקבוע k, עבורו הווקטורים $u=(1,k,3),\ \ v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצא וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(2,5,7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכח כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ \ q(x)=6x^2-6x+1$ אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:
$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$
הראה כי הפולינומים:
$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$
אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $A=\begin{pmatrix}k & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.
בהתייחס למכפלה הפנימית: $<A,B>=tr\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,
מצא את הערך של הקבוע k, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכח כי: $u\perp v \Leftrightarrow \|u+v\|=\|u-v\|$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכח כי: $u\perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכח כי: $\|u\|=\|v\| \Rightarrow (u-v)\perp(u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) $k=2$
3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) $k=0.5$
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

משלים אורתוגונלי

שאלות

1) יהי $W=span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $w=span\{(1,1,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W=span\{x\}\subseteq P_2[R]$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

4) יהי $W=span\{x,x^2\}\subseteq P_2[R]$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

5) יהי $W=span\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_{2\times2}[R]$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times2}[R]$.

6) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot\underline{x}=0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תן פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A.

9) נניח ש- W_1,W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $W_1\subseteq W_2\Rightarrow W_2^{\perp}\subseteq W_1^{\perp}$.

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V ממֵמד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) $W^{\perp}=span\left\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\right\}$

2) $W^{\perp}=span\left\{(-1,0,1),(-1,1,0)\right\}$

3) $W^{\perp}=span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp}=span\left\{\left(1.5x^2-6x+5\right)\right\}$

5) $W^{\perp}=span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

6) $$B_W=\left(\begin{matrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{matrix}\right)$$

7) $B_{W^{\perp}}=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

8) הסבר בווידאו.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

קבוצה ובסיס אורתוגונלי

שאלות

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראה שהקבוצה S היא אורתוגונלית.

ב. נרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכח שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשום את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף ליניארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

רשום את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.

הוכח שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{<v,u_1>}{<u_1,u_1>}u_1+\frac{<v,u_2>}{<u_2,u_2>}u_2+\ldots+\frac{<v,u_n>}{<u_n,u_n>}u_n$.

הערה: הקבוע $a_i=\frac{<v,u_i>}{<u_i,u_i>}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i, או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $M_3[R] \supseteq S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$.
בדוק: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
ענה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$ ג. הוכחה.

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4) שאלת הוכחה.

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\dots\right\}$$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\dots\right\}$$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית.

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\right\}$$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

ההיטל של וקטור

שאלות

1) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$. מסמנים גם $proj(v,w)$.

3) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$, במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$.

4) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תשובות סופיות

1) $c=0, \quad proj(v,w)=cw=0$

2) $c=\dfrac{-2}{3}, \quad proj(v,w)=cw=-\dfrac{2}{3}(0,2,-1,2)$

3) $c=\dfrac{5}{6}, \quad proj(p,q)=c\cdot q(x)=\dfrac{5}{6}x^2$

4) $c=\dfrac{1}{6}, \quad proj(A,B)=cB=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

תהליך גרהם-שמידט

שאלות

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U, בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U, בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

1) $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

2) $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

3) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

4) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7 & 14\\ -9 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$

מטריצות אורתוגונליות

שאלות

1) ציין אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) הוכח את המשפטים הבאים:
א. מטריצה ריבועית A היא אורתוגונלית, אם ורק אם $A^T A = I$.
ב. מטריצה אורתוגונלית A היא הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^T$.

3) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית.
הוכח כי המטריצות A^{-1}, A^T אורתוגונליות.
ב. הוכח כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר), היא מטריצה אורתוגונלית.
ג. הוכח שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.
ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ו. הראה כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

4) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכח או הפרך:
א. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n, אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n.
ב. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n, אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה מסדר n אשר עמודותיה $\{v_1,...,v_n\}$,
מהוות בסיס **אורתוגונלי** ל- R^n. נסמן $v_i v_i = \lambda_i$.
הוכח כי $A^T A = \text{diag}\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$.

ב. הוכח: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי,
יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפוך את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ד. הפוך את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & -\sqrt{8} \\ -\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} & 0 \end{pmatrix}$.

6) הוכח את המשפט:
יהיו B ו- C שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב R^n.
אז מטריצת המעבר מ- B ל- C היא מטריצה אורתוגונלית.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי B לבסיס C,
של המרחב R^n.
הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס C גם אורתונורמלי.

ב. תהי A מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס אורתונורמלי C,
של המרחב R^n.
הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס B גם אורתונורמלי.

8) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית מסדר n, אז קיימים שני בסיסים
אורתונורמליים B ו- C, של המרחב R^n, כך ש- A משמשת מטריצת
המעבר מ- B ל- C.

ב. יהי $v \in R^n$, כך ש- $\|v\|=1$.
הוכח שקיימת מטריצה אורתוגונלית,
שהעמודה הראשונה שלה היא הוקטור v.

תשובות

1) א. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ ב. $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

ג. לא אורתוגונלית.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

ג. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.2 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.25 & 0\\ -0.4 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$ ד. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5}\\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5}\\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0\end{pmatrix}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

העתקות אורתוגונליות

שאלות

1) תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית.
הוכח את המשפט: T אורתוגונלית $\Leftrightarrow$ $\forall u \in R^n \quad \|T(u)\| = \|u\|$.

2) תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכח כי T היא איזומורפיזם.
ב. הוכח כי T^{-1} גם אורתוגונלית.

3) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית מסדר n.
נגדיר העתקה לינארית $T:R^n \to R^n$, על ידי $T(u) = Au$.
הוכח כי T היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכח שכל העתקה אורתוגונלית $T:R^n \to R^n$,
ניתן להציג בצורה $T(u) = Au$, כאשר A אורתוגונלית.

4) ענה על הסעיפים הבאים:
א. הוכח שהערכים העצמיים היחידים של **העתקה** אורתוגונלית הם ± 1.
ב. הוכח שהערכים העצמיים היחידים של **מטריצה** אורתוגונלית הם ± 1.

5) הוכח שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.

6) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של R^n.
הוכח ש- $\{T(u_1),\dots,T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של R^n.
ב. תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1,\dots,u_n\}$ של R^n,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1),\dots,T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של R^n.
הוכח כי T היא העתקה אורתוגונלית.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.

ב. הוכח שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה T:

א. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

ב. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\sqrt{3}x$.

ג. $T:R^2\to R^2$ העתקת הסיבוב בזווית 30^0 ב- R^2.

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תאר את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית.
השתמש במושגים שיקוף וסיבוב.

א. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ב. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ג. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ד. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

* את סעיף ד' פתור בשתי דרכים שונות.

10) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון.
מצא נוסחה עבור ההעתקה T.

11) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\tan\frac{\theta}{2}x$.
מצא נוסחה עבור ההעתקה T.

12) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה אורתוגונלית.
הוכח ש- T היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.

תשובות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) א. $T(x,y)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$ ב. $T(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

ג. $T(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

9) א. שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$. ב. שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

דרך II: שיקוף ביחס לישר $y=-\frac{1}{3}x$.

10) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

11) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

12) שאלת הוכחה.

דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-5** חשב את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה) :

1) א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשב את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

6) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

7) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **10-8** חשב את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג :

8)
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

9)
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

10)
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

בשאלות **12-11** הראה, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס :

11) א.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

ב.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

ג.
$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$$

12) א.
$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ב.
$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$$

ג.
$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{vmatrix}$$

ד.
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

בשאלות **15-13** נתון כי : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשב :

13)
$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$$

14)
$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$$

15)
$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

16) הוכח כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

17) הוכח כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

18) חשב: $\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

בכל אחת מהשאלות **19-25**, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n.
חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה:

19) $$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$$

20) $$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}$$

21) $$a_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$$

22) $$a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & else\end{cases}$$

23) $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

24) $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1)\end{pmatrix}$$

25) $$a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\\ 0 & else\end{cases}$$

* בשאלה **25**:

1. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה.
2. הנח כי $a=3,\quad b=1,\quad c=2$, ומצא:

א. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

ב. את הדטרמיננטה, כאשר $n=20$.

26) חשב:
$$\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y\end{vmatrix}.$$

בשאלות **28-27** נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.

27) חשב: א. $\left|ABA^{-1}B^{T}\right|$ ב. $|4A^{2}B^{3}|$

28) חשב: א. $|-A^{-2}B^{T}A^{3}|$ ב. $|-2A^{2}A^{T}adjB|$

29) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכח: $|A|=|B|$.

30) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשב את $|B|$.

31) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^{2}-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשב את $|A|, |B|$.

32) הוכח: א. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ ב. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

33) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי זוגי.
הוכח ש- $|A|=0$.

34) נתון: A מטריצה מסדר n, $|A|=128$, $2AB=B^{T}A^{2}$.
מצא את n.

35) נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2, \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. -1
2) א. -1 ב. -3 ג. -14
3) א. 24 ב. 234 ג. -300
4) 9
5) 6
6) א. 0 ב. 0 ג. 3
7) א. 24 ב. 44 ג. 104
8) 120
9) 114
10) 6
11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
12) פתרונות באתר.
13) -8
14) 16
15) -36
16) הוכחה.
17) הוכחה.
18) $(k-1)^4(k+4)$
19) $n!$
20) $(-1)^{n-1}n!$
21) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$
22) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$
23) 1
24) $2\cdot 3^{n-2}$
25) 1. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$, $D_2=a^2-bc$, $D_3=a^3-2abc$
2. א. $D_n=2^{n+1}-1$ ב. $D_{20}=2^{21}-1$
26) 0
27) א. 4 ב. 2^{13}
28) א. -8 ב. -2^{11}
29) הוכחה.
30) $\frac{81}{32}$
31) $|A|=18, |B|=-2/3$
32) הוכחה.
33) הוכחה.
34) 7
35) 4^n

כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות

שאלות

בשאלות **1-3** פתור את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

4) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$.

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

5) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

1) $x=1,\ y=2$

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$

3) $x=y=z=t=1$

4) א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

5) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות **1-3** חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

4) נתון: $A=\begin{pmatrix}-9 & 26 & -1 & 14 & 10\\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0\\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0\\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

א. חשב: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשב: $\left(A^{-1}\right)_{1,5}$.

5) הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

6) נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.
הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

7) נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

8) נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.
האם המטריצות הבאות הפיכות:

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

9) מצא את ערכי k עבור המטריצה הבאה לא הפיכה: $\begin{pmatrix}4 & 0 & 7 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0\\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k\\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1\\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

10) ידוע ש- A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B\neq 0$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $AB=0$ אז $A=0$.
ב. אם $|AB|=0$ אז $A=0$.
ג. אם $|AB|=0$ אז $|A|=0$.
ד. אם $AB=0$ אז $|A|=0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3\times5}$, $B_{5\times3}$.
הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. $|AB|=|BA|$
ב. $adj(AB)\neq adj(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3\times3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4,
אז $|adj(A)\cdot B|$ שווה ל:
א. $4^3|A|^3$
ב. $4^3|B|^3$
ג. $4|B|^3$
ד. $4|A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A=(a_{ij})$ מסדר $n\geq 3$ המקיימת $a_{ij}=i+j-1$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $|A|=4$
ב. A הפיכה.
ג. $adj(A)=0$
ד. $|A|=0$

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A, אז:
א. בהכרח $\det(A)=\det(G)$ וגם $adj(A)=adj(G)$.
ב. בהכרח $\det(A)=\det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A)\neq adj(G)$.
ג. ייתכן ש- $\det(A)\neq\det(G)$, אך בהכרח $adj(A)=adj(G)$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי $A=\left(a_{ij}\right)$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש- $a_{ij}=\begin{cases} i & i=j \\ 1 & i\neq j \end{cases}$.

לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=n!-1$

ב. A הפיכה.

ג. $adj\left(A\right)$ לא הפיכה.

ד. אם $n=4$ אז $|Adj(A)|>214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 4$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $rank\left(A\right)=n-2$, אז בהכרח $adj\left(A\right)=0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj\left(A\right)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj\left(A\right)=0$, אז בהכרח $A=0$.

17) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4, אז $adjB$ מתקבלת מ-$adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $\left|Adj\left((-1+i)A\right)\right|=i$.

חשב $|\det(A)|$.

19) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.

הוכח את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj\left(A^{-1}\right)=\left(Adj(A)\right)^{-1}$

ג. $|Adj(A)|=|A|^{n-1}$

תשובות סופיות

1) $adj(A)=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) א. 240 ב. 0.5

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) הוכחה.

8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.
ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

9) אם ורק אם $k=0$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) ד

13) הוכחה.

14) ד

15) ד

16) הוכחה.

17) ד

18) $2^{\frac{-5}{2}}$

19) הוכחה.

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$
2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(1,1,-1),\ (-1,3,1),\ (3,3,-2)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

1) א.1. 13. א.2. 14 ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2

שדות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור $(\oplus)$ וכפל $(\otimes)$ על R.
בדוק, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $x \oplus y = x + y + 4$, $x \otimes y = 2xy$

ב. $x \oplus y = x + y$, $x \otimes y = 2xy$

ג. $x \oplus y = y$, $x \otimes y = y^2$

2) נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכח שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) נתונה הקבוצה $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \ , \ (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

הוכח שהקבוצה C, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.
באיזה שדה מפורסם מדובר?

4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.

ב. הוכח שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.

ג. הוכח שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.

ד. הוכח שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

5) יהיו a, b איברים בשדה.

א. הוכח כי $a + a = a \Rightarrow a = 0$.

ב. הוכח כי $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

ג. הוכח כי $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

6) יהיו a ו- b איברים של שדה.
הוכח כי:
א. $(-1)\cdot a=-a$
ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

7) הוכח שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכח כי $ab=cb\ \Rightarrow\ a=c$, לכל a,b,c, בשדה $(b\neq 0)$.

8) הוכח שלכל שלושה איברים בשדה $0\neq a,b,c$,
קיים בשדה איבר יחיד x, כך ש- $ax+b=c$.

9) נתון F שדה, ויהיו $x,y\in F$, כך ש- $xy\neq 0,1$.
הוכיחו, בעזרת אקסיומות השדה, כי $(x-xyx)^{-1}=x^{-1}+(y^{-1}-x)^{-1}$,
וכי שני האגפים של המשוואה לעיל מוגדרים היטב.

10) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור וכפל על R^2.

א. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$

ב. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)$

האם $\left(R^2,+,\cdot\right)$ שדה?

11) ענה על הסעיפים הבאים:
א. נתונה הקבוצה $A=\{f:R\to R\mid \forall x,\ f(x)\neq 0\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
האם הקבוצה A, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?
ב. נתונה הקבוצה $B=\{f:R\to R\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור וכפל כמו בסעיף א'.
האם הקבוצה B, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

12) יהי F שדה בעל מספר **סופי** של איברים.
הראו שלכל איבר $a\neq 0$ ב- F, קיים k טבעי, כך ש- $a^k=1_F$.

13) נתון השדה Z_7.

א. רשום את כל איברי השדה והגדר את פעולות החיבור והכפל בשדה.

ב. מצא את האיבר הנגדי לאיבר 3 ולאיבר 5 בשדה.

ג. מצא את האיבר ההופכי לאיבר 4 ולאיבר 5 בשדה.

14) נתונה הקבוצה $Z_p=\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},...,\overline{p-1}\right\}$, p מספר ראשוני.

כאשר $\overline{a}=\left\{x\in Z\mid a\equiv x(\mathrm{mod}\,p)\right\}$, ו- $\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}\,p)$.

לכל $\overline{a},\overline{b}$ בקבוצה, מגדירים פעולות חיבור וכפל באופן הבא:

$$\overline{a}\oplus\overline{b}=\overline{a+b},\ \ \overline{a}\otimes\overline{b}=\overline{a\cdot b}$$

הוכח ש- $\left(Z_p,\oplus,\otimes\right)$ מהווה שדה.

בקיצור, הוכח כי קבוצת השאריות מודולו p, כאשר p ראשוני, מהווה שדה.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) הוכחה.

10) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

11) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

12) הוכחה.

13) א. הוכחה.

ב. האיבר הנגדי לאיבר $\overline{3}$ הוא $\overline{4}$, והאיבר הנגדי לאיבר $\overline{5}$ הוא $\overline{2}$.

ג. האיבר ההופכי לאיבר $\overline{4}$ הוא $\overline{2}$, והאיבר ההופכי לאיבר $\overline{5}$ הוא $\overline{3}$.

14) הוכחה.

חזרה על מושגים מתורת הקבוצות

שאלות

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0$, $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x\,|\,10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x\,|\,x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x\,|\,x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצא שתי קבוצות, A ו-B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{7,8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\nsubseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\nsubseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\nsubseteq A$.

9) הוכח: $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$.

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשום את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

תשובות סופיות

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2\ ,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות A, B ו-C שוות זו לזו, והקבוצות D ו-E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

8) א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) הוכחה.

10) $1)\ A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, $2)A\cap B=\{4,6,8\}$, $3)(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$

מספרים מרוכבים

שאלות

בשאלות **1-3** פתור את המשוואות ומצא את z :

1) $z^2+9=0$ **2)** $z^2-4z+5=0$ **3)** $z^2-6z+13=0$

בשאלות **4-7** חשב:

4) $(i\sqrt{2})^6$ **5)** $(i^5-i^{13})^2$

6) $(4+i)-(2+10i)$ **7)** $(-4-i)(2-3i)$

בשאלות **8-10** חשב (כתוב את התוצאה בצורה $z=x+yi$):

8) $\frac{5}{2+i}$ **9)** $\frac{1+i}{1-3i}$ **10)** $\frac{i}{1-i}-\frac{1}{(i+1)^2}$

פתור את המשוואות בשאלות **11-13** ומצא את המספר המרוכב z :

11) $2z-6i=\bar{z}-1$ **12)** $z\bar{z}-5\bar{z}=10i$ **13)** $(1+i)z^2+2z-i+1=0$

כתוב את המספרים בשאלות **14-21** בצורה קוטבית:

14) $1+\sqrt{3}i$ **15)** $-1-i$ **16)** $-3-\sqrt{3}i$ **17)** $1-i$

18) $1+i$ **19)** $\sqrt{3}-i$ **20)** $\sqrt{3}i$ **21)** -8

בשאלות **22-27** חשב:

22) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$ **23)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^9$ **24)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$

25) $\sqrt[6]{-8}$ **26)** $\sqrt[5]{1}$ **27)** $\sqrt[3]{-8}$

28) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^4+z^2+1=0$.

ב. הראה כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6=1$.

29) נתונה המשוואה $z^4=-8-8\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכח כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

30) פתור את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4=1$.

31) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3=i$.

ב. הראה שמכפלת שלושת הפתרונות היא i.

ג. הראה שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

32) ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה $z^5=-16(\sqrt{3}-i)$.

ב. הוכח כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצא את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1,a_1q,a_1q^2,...,a_1q^{n-1}$, באשר q מנת הסדרה.

33) נתון $w=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה $z^3=w^3$.

ב. הראה כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3.

34) נתונה המשוואה $(iz+1)^2=2-2\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה z_1 ו- z_2.

ב. הראה כי $\left|\frac{z_1\cdot z_2}{z_1+z_2}\right|=\sqrt{3.25}$.

35) נתונה המשוואה $(z-1)^3=1$.

הוכח שסכום שורשיה הוא 3.

36) נתונה המשוואה $z^3=-\sqrt{3}+i$.

א. מצא את שורשי המשוואה: z_3, z_2, z_1.

ב. מצא את הסכום $|z_1|^3+|z_2|^3+|z_3|^3$.

ג. הראה כי הסכום $(z_1)^9+(z_2)^9+(z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

37) נתונה המשוואה $z^2+|z|^2-2ti=18s^2$, z הוא מספר מרוכב.

כאשר s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס. z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה.

א. הבע את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t.

ב. נתון $z_1\cdot z_2=-18i$. מצא את הפרמטרים s ו- t.

38) ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה $\bar{z}\cdot i+(\bar{z})^2+|z|^2+z+\bar{z}=0$.

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית

שכל איבריה שונים מאפס. הפרש סדרה זו הוא: $1+\frac{1}{16}i$.

האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.

חשב את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d$,

באשר d נקרא הפרש הסדרה.

בשאלות **39-44** נתון: $v=(5+i, 2-3i, 7+2i)$, $u=(3-2i, 4i, 1+6i)$. מצא:

39) $4u+v$ **40)** $2i\cdot u-v$ **41)** $u\cdot v$

42) $u\cdot u$ **43)** $|u|$ **44)** $|v|$

תשובות סופיות

1) $\pm 3i$
2) $2\pm i$
3) $3\pm 2i$
4) -8
5) 0
6) $2-9i$
7) $-11+10i$
8) $2-i$
9) $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$
10) $-\frac{1}{2}+i$
11) $z=-1+2i$
12) $z=1+2i, z=4+2i$
13) $z=i, z=-1$
14) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
15) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
16) $\sqrt{12}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$
17) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$
18) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
19) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$
20) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
21) $8(\cos\pi+i\sin\pi)$
22) $\frac{1}{32}i$
23) -2^9
24) -1
25) $k=0,1,2,3,4,5$ $\quad 8^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}\right)$
26) $k=0,1,2,3,4$ $\quad 1^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{0+2\pi\kappa}{5}+i\sin\frac{0+2\pi\kappa}{5}\right)$
27) $k=0,1,2$ $\quad 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}\right)$
28) א. $z_1=cis60^\circ, z_2=cis240^0, z_3=cis120^\circ, z_4=cis300^\circ$ ב. הוכחה.
29) א. $z_1=1+\sqrt{3}i, z_2=-\sqrt{3}+i, z_3=-1-\sqrt{3}i, z_4=\sqrt{3}-i$ ב. הוכחה.
30) $z=0, z=1, z=-1$
31) א. $z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_2=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_3=-i$ ב. הוכחה. ג. הוכחה.
32) א. $n=1,2,3,4,5$ $\quad z_n=2cis[30^\circ+(n-1)72^\circ]$ ב. $q=cis72^\circ$
33) א. $z_1=cis45^\circ, z_2=cis165^\circ, z_3=cis285^\circ$ ב. הוכחה.
34) א. $1+(1+\sqrt{3})i, -1+(1-\sqrt{3})i$ ב. הוכחה.

35) הוכחה.

36) א. $z_1 = \sqrt[3]{2}cis50^\circ$, $z_2 = \sqrt[3]{2}cis170^\circ$, $z_3 = \sqrt[3]{2}cis290^\circ$ ב. 6 ג. הוכחה.

37) א. $z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i$, $z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i$ ב. $s = \pm 1$, $t = 9$

38) א. $z_1 = 0$, $z_2 = -0.5 + 0.5i$ ב. $a_1 = -8.5$

39) $(17-7i, 2+13i, 11+26i)$

40) $(-1+5i, -10+3i, -19)$

41) $20+35i$

42) 66

43) $\sqrt{66}$

44) $\sqrt{92}$

חילוק פולינומים

שאלות

בשאלות **1-8** צמצם עד כמה שניתן את השברים האלגבריים :

1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

2) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

3) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

4) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$

5) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$

6) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$

7) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$

8) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$

תשובות סופיות

1) x^2+1

2) 0

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $x-7$

5) x^2+2x+5

6) x^3-2x^2+5x-1

7) x^2-x-3

8) x^2-4

פתרון משוואות פולינומיאליות

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-7**:

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

2) $k^3+2k^2-3k+20=0$

3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

4) $k^3-6k^2+12k-8=0$

5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

6) $k^3-k^2+k-1=0$

7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

תשובות סופיות

1) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

2) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

3) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

4) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

5) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

6) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

7) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

מרחבים ותת-מרחבים וקטורים

שאלות

סימון:

R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f: R \to R)$ מעל השדה R.

בשאלות **1-7** בדוק האם W תת-מרחב של R^3 :

1) $W = \{(a,b,c) \mid a+b+c=0\}$

2) $W = \{(a,b,c) \mid a=c\}$

3) $W = \{(a,b,c) \mid a=3b\}$

4) $W = \{(a,b,c) \mid a<b<c\}$

5) $W = \{(a,b,c) \mid a=c^2\}$

6) $W = \{(a,b,c) \mid c-b=b-a\}$
כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

7) $W = \{(a,b,c) \mid b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$
כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות **8-15** בדוק האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A|\ A=A^T\}$.

9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.
כלומר, $W=\{A|\ AB=BA\}$.

10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A|\ |A|=0\}$.

11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A|\ A^2=A\}$.

12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס.
כלומר, $W=\{A|\ AB=0\}$.

14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A|\ tr(A)=0\}$.

15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **16-21** בדוק האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x)|\ p(4)=0\}$.

17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≤ 4.
כלומר, $W=\{p(x)|\deg(p)\leq 4\}$.

19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4\leq n\leq 7$.

21) $W=\{p(x)|\ p(0)=1\}$

בשאלות **30-22** בדוק האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

27) $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

28) $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

29) $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

30) $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

31) בדוק האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\overline{z}_1, z_3=z_1+\overline{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי R.
ב. מעל שדה המרוכבים C.

32) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&-1\\1&-1&1&-1&-1\\1&3&-1&1&1\end{pmatrix}$.

א. מצא וקטור b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

33) יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F.

א. מצאו תנאי על k, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של V.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V, שפורשים את W.

הערה: לפתרון סעיף זה עבור קודם על הנושא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית.

תשובות סופיות

1)	כן	**2)**	כן	**3)**	כן	**4)**	לא	**5)**	לא
6)	כן	**7)**	לא	**8)**	כן	**9)**	כן	**10)**	לא
11)	לא	**12)**	כן	**13)**	כן	**14)**	כן	**15)**	כן
16)	כן	**17)**	לא	**18)**	כן	**19)**	כן	**20)**	לא
21)	לא	**22)**	כן	**23)**	כן	**24)**	כן	**25)**	כן
26)	כן	**27)**	לא	**28)**	כן	**29)**	לא	**30)**	כן

31) א. כן ב. לא

32) א. $u=(1,0,0,0,0)$ ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) \mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$
ג. לא.

33) א. $k=0$ ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3, 6x-7x^2+x^4\}$

צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים :

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

1) א. האם u_1 הוא צירוף ליניארי של u_4 ?

ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית? במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית? במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

ב. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v=(a,b,c,d)$.

א. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

ב. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

6) הבע את הווקטור $(10,8,0,14)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2 ו- u_3 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הבע את הווקטור $(7,10,-2,11)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

א. בדוק האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.

ב. במידה והמטריצות תלויות, רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף ליניארי של יתר המטריצות.

ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x)=4+x+x^2+5x^3$, $p_2(x)=11x-5x^2+3x^3$, $p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3$, $P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$.

א. בדוק האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.

ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשום כל פולינום כצירוף ליניארי של שאר הפולינומים.

ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a,b,c, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$$

בשאלות **13-11** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית, ובמידה וכן רשום כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

11) $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

12) $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

13) $\{u+v,v+w,w\}$

בשאלות **15-14** בדוק האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$, תלויים ליניארית ב- C^3:

14) מעל C.

15) מעל R.

16) נתבונן ב- $V=R$, כמרחב וקטורי מעל השדה Q.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R, כשהוא מרחב וקטורי מעל Q.

17) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,\dots A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$.

18) לפניכם 3 תת-קבוצות של R^4:

$$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$$
$$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$$
$$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$$

א. האם $U=W$?
ב. האם $U=V$?

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2, \ \ u_2 = u_1 - 2u_3$.
3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2, \ \ u_2 = 4u_4 - u_1$.
4) א+ב+ג. $k = -4$
5) $a = 5t + 3s, \ b = 4t - 13s, \ c = 7s, \ d = 7t$
6) אינסוף.
7) אינסוף.
8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$
ב. $A = B + 2C, \quad B = A - 2C, \quad C = 0.5A - 0.5B, \quad D = 0.25A + 0.25B$
9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$
ב. $p_1 = p_2 + 2p_3, \ \ p_2 = p_1 - 2p_3, \ \ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2, \ \ p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$
10) לכל ערך של a, b, c.
11) א. הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z, \ \ y = 0.5x + 0.5z, \ \ z = 2y - x$
ב. הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z, \ \ y = 0.5x + 0.5z, \ \ z = 2y - x$
ג. בלתי תלויים ליניארית.
12) א. תלויים. ב. בלתי תלויים ליניארית.
13) בלתי תלויים ליניארית.
14) תלויים.
15) בלתי תלויים ליניארית.
16) שאלת הוכחה.
17) לא.
18) א. כן. ב. לא.

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

1) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

2) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 16\\ 7 & 8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

3) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3\}$

ג. $\{1+2x+3x^3,\ \ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9),(2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצא קבוצה T', שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים,
בלתי תלויה ליניארית ב- T .

ג. השלם את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

5) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

.1 $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ .2 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ .3 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצא בסיס וממד ל- W, U ו- V.

6) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

7) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

8) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

9) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

10) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

11) נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

12) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U.

ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

13) לפניכם תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U.

14) לפניכם תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות **15-16** מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציין את דרגת המטריצה (rank) :

15)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

16)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
2) א. לא. ב. לא. ג. כן.
3) א. לא. ב. לא. ג. כן.
4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$
5) W - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.
U - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.
V - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.
6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.
7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.
8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.
9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.
10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.
11) בסיס: $\{(p_1(x)=-1+x^3,\ \ p_2(x)=-1+x^2,\ \ p_3(x)=-1+x)\}$, ממד: 3.
12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.
ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.
13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.
14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.
15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.
מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.
16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.
מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים

שאלות

1) לפניך 3 מערכות של משוואות ליניאריות הומוגניות :

$$1)\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$$

נסמן ב- V, U, W את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 2,1 ו-3 בהתאמה.

א. מצא בסיס וממד ל- U, W ו- V.

ב. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ג. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

2) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב R^4 :

$$U=sp\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V=sp\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U.

ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

ג. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$ (פתור בשתי דרכים שונות).

ה. האם $U+V=R^4$?

ו. האם $U\oplus V=R^4$?

3) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x-x^2+2x^3, 3-x+7x^2+4x^3, -5+3x-15x^2-6x^3\}$$

$$V=sp\{1-x+x^2+x^3, 1+2x^2-x^3, 1+x+3x^2-3x^3, 5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ב. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

4) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x+x^3, 1+2x+x^2+2x^3, -1+2x+3x^2+2x^3\}$$

$$V=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=p(-1)=0\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ב. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

5) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = sp\left\{1+x, x+x^2, 1+x^3\right\}$$
$$V = \left\{p(x) \in P_3[R] \middle| p'(0) = 0\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

6) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$

$$U = \left\{\begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in R\right\}$$

$$W = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. אשר את משפט הממד עבור תרגיל זה.

7) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_2[R]$:

$$U = \left\{A \in V \mid A = -A^T\right\} \ , \ W = \left\{A \in V \mid A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. האם $U+W=V$?
ה. האם $U \oplus W = V$?

8) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_3[R]$:

$U = \left\{A \in V \mid A = A^T\right\}$, $W = \{A \in V \mid$ משולשית עליונה $A\}$

א. מצא בסיס וממד ל- U.
ב. מצא בסיס וממד ל- W.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ה. $U \oplus W = V$

9) יהיו U ו- W שני תת-מרחבים מממד 2 של R^3.
הוכח כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.

10) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 9.
א. הוכח כי $U+W=V$.
ב. חשב $\dim(U \cap W)$.

11) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 7.
מצא את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

12) יהי V מרחב וקטורי ממימד 7.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים של V, כך ש- $\dim U=4,\ \dim W=5$ $(U\not\subseteq W)$.
מצא את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

13) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. $\phi\neq A,B\subseteq V$.
נגדיר: $A+B=\{a+b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$.
הוכח או הפרך:
א. $sp(A+B)=sp(A)\cup sp(B)$
ב. $sp(A\cup B)=sp(A)\cup sp(B)$
ג. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ד. $sp(A+B)=sp(A)+sp(B)$
ה. $sp(A\cap B)=sp(A)\cap sp(B)$

14) יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^3, המוגדרים על ידי:
$U=\{(a,b,c)\,|\,a=b=c\},\ W=\{(0,b,c)\}$.
הוכח כי $U\oplus W=R^3$.

15) יהי $V=M_n[R]$.
א. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות הסימטריות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.
הוכח כי $U\oplus W=V$.
ב. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.
הוכח כי $U\oplus W\neq V$.

תשובות סופיות

1) א. $\dim W=2$, $B_W=\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$

$\dim U=2$, $B_U=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$

$\dim V=3$, $B_V=\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$

ב. $\dim(U+V)=3$ $B_{U+V}=\{(0,0,-1,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0)\}$

ג. $\dim\left(U\cap V\right)=2$, $B_{U\cap V}=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$

2) א. $\dim U=2$, $B_U=\{(1,1,-1,2),\ (0,2,-5,1)\}$, $\begin{cases}-3x+5y+2z=0\\ -3x-y+2t=0\end{cases}$

ב. $\dim V=3$, $B_V=\{(1,-1,1,1),\ (0,1,1,-2),\ (0,0,2,-5)\}$, $-8x-y+5z+2t=0$

ג. $\dim(U+V)=4$, $B_{U+V}=\{(1,1,-1,2),\ (0,-4,10,-2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$

ד. $\dim(U\cap V)=1$, $B_{U\cap V}=\{(5,1,5,8)\}$ ה. כן. ו. לא.

3) א. $\dim\left(U+V\right)=4$, $U+V=sp\left\{1+x-x^2+2x^3,2x-5x^2+x^3,x^2,x^3\right\}$

ב. $\dim(U\cap V)=1$, $B_{U\cap V}=\left\{5+x+5x^2+8x^3\right\}$

4) א. $\dim(U+V)=3$, $B_{U+V}=\left\{1+x+x^3,x+x^2+x^3,x^2+2x^3\right\}$

ב. $\dim(U\cap V)=1$, $B_{U\cap V}=\left\{-1+x^2\right\}$

5) $\dim(U\cap V)=2$, $B_{U\cap V}=\left\{-1+x^2,1+x^3\right\}$

6) א. $\dim(U)=2$, $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-4\\10&-2\end{pmatrix}\right\}$

$\dim(W)=3$, $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-6&15\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\dim(U+W)=4$, $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\-5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\dim(U\cap W)=1$, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}5&1\\5&8\end{pmatrix}\right\}$

ד. ראו בווידאו.

7) א. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim W=2$ $B_U=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim U=1$,

ב. $\dim(U+W)=3$ $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$,

ג. $\dim(U\cap W)=0$, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

ד. לא.   ה. לא.

8) א.

$$B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim U=6$

ב.

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim W=6$

ג.

$$B_{U+W}=\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

$\dim(U+W)=9$

ד. $\dim(U\cap W)=3$, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

ה. לא.

9) הוכחה.

10) א. הוכחה.   ב. 8

11) $\dim(U\cap W)=4,5,6\ or\ 7$, $\dim(U+W)=8,\ 9\ or\ 10$

12) $\dim(U+W)=6\ or\ 7$, $\dim(U\cap W)=2,3 or 4$

13) הוכחה.

14) הוכחה.

15) הוכחה.

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

.1 $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$ .2 $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$ .3 $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}\ ,\quad B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}$$

ו. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ז. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ח. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

3) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

ט. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B. סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.

י. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E. סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

יא. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_B^E$.

4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V.
הוכח כי הווקטורים $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ בת"ל, **אם ורק אם** וקטורי הקואורדינטות שלהם, לפי הבסיס B, $\{[u_1],[u_2],...,[u_m]\}$ הם בת"ל.
הסבר כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

1) א. $(x,y-x-z,z)$ ב. $(x,y,z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $(a,b-a-c,c)$ ב. $(a,b,c-a-b)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

3) א. $(x,y-x,z-y+x,t-z+y-x)$ ב. (x,y,z,t) ג. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

4) שאלת הוכחה.

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות הוכחה

1) יהי V מרחב, ותהי $A=\{v_1,v_2\cdots,v_k\}$ קבוצה; $b\in V$.
הוכיחו כי: $b\in sp(A)\Leftrightarrow sp(A\cup\{b\})=sp(A)$.

2) יהיו u,v,w וקטורים, כך ש- $\{u,v\}$ בלתי-תלויה ליניארית ו- $u\in sp(\{v,w\})$.
א. הוכיחו ש- $w\in sp(\{u,v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף z, הקבוצה $\{u,w,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u,v,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.

3) יהי U מרחב, תהי $A=\{u_1,u_2\ldots,v_n\}\subseteq U$ ויהי $\mu\in U$ וקטור כלשהו.
הוכח כי אם $\mu\in sp(A)$, וכן $\mu\notin sp(A-\{u_n\})$, אז $u_n\in sp(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},u)$.

4) יהי V מרחב, $b\in V$ ו- $A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו כי $A\cup\{b\}=\{v_1,v_2\ldots,v_k,b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b\in sp(A)$.

5) יהי V מרחב n מימדי, תהי $A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ ויהי $b\in sp(A)$.
למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\ldots x_kv_k=b$ אין פתרון יחיד. הוכח או הפרך:
א. $k\geq n$
ב. A פורשת את V.
ג. A בהכרח תלויה ליניארית.

6) יהי V מרחב, $b\in V$ ו- $A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכח או הפרך:
א. אם $b\notin sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא ת"ל.

7) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1,v_2,v_3 \in V$.
נסמן: $S=\{v_1,v_2,v_3\},\quad T=\{av_1+v_2+v_3, av_2+v_3, v_1+v_2, av_3\}$.
הוכח או הפרך:
א. $spS \subseteq spT$
ב. אם S תלויה ליניארית ואם $a \neq -2,1$, אז בהכרח $sp(T)=sp(S)$.
ג. $\dim(spT) \leq 2$
ד. $\dim(sp(T))=\dim(sp(S))$

8) יהי V מרחב ותהיינה $A=\{v_1,v_2,\dots,v_k\},\ B=\{w_1,w_2,\dots,w_m\}$ קבוצות וקטורים ב- V.
הוכח או הפרך:
א. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ב. אם $A\cup B$ בת"ל, אז A,B שתיהן בת"ל.
ג. אם $\dim V=m+k$ וגם A,B שתיהן בת"ל, אז $A\cup B$ בת"ל.
ד. אם $A\cup B$ בת"ל, אז $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

9) יהי V מרחב ויהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ים.
תהיינה $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ $\quad A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}\subseteq U,$ שתי קבוצות בת"ל.
הוכח כי אם $U\cap W=\{0\}$, אז $A\cup B$ בת"ל.

10) יהי V מרחב ויהיו U,W תמ"ים שלו.
הוכח כי $U\cup W$ מרחב $\Leftrightarrow$ $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

שאלות אמריקאיות

11) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\ge 2$. אז בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של A^2 מוכל במרחב השורות של A.
ב. אם $AB=0$ אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ג. אם AB משולשית עליונה אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
ד. אם $AB=B$ ובנוסף A נילפוטנטית אז בהכרח $B=0$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

*הערה: מטריצה ריבועית A תיקרא נילפוטנטית אם קיים n טבעי, כך ש-$A^n=0$.

12) נסמן $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$ שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$. אזי בהכרח מתקיים:

א. $U=W$
ב. $\dim U=\dim W$
ג. $U\subseteq W$
ד. אם $U+W=\mathbb{R}^3$, אז $U\cap W=\{0\}$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש-$\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$. אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש-A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
ב. ייתכן ש-A מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
ג. שני מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
ד. A תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

14) במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$, תהי $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ-$\mathbb{R}^2$. אז מטריצה P המקיימת $[v]_A=Pv$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}$
ב. $P=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$
ג. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$
ד. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\end{pmatrix}$
ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות וזרות של וקטורים מ- V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם $A\cup B$ תלויה ליניארית, אז בהכרח A תלויה ליניארית או B תלויה לינארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה ליניארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם W תת מרחב של מרחב וקטורי V, אז:

א. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, וכל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ב. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, אבל לא כל בסיס של W מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של V.

ג. לא כל בסיס של V מכיל בהכרח בסיס כלשהו של W, אבל כל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

17) יהיו U,W שני תתי-מרחבים של מרחב V, כך ש- $\dim V=n,\ \dim U=\dim W=n-1$. אז:

א. $n-2\le \dim(U\cap W)$

ב. אם $U\neq W$, ייתכן ש- $U\subset W$.

ג. קיים $v\in V$, כך ש- $V=U+sp\{v\}$ ו- $U\cap sp\{v\}=\{0\}$.

ד. אם $U+sp\{v\}=V$ ו- $U\cap sp\{v\}=\{0\}$, אז $v\in W$.

18) נניח כי v_1,v_2,v_3,v_4 הם וקטורים במרחב ליניארי V.

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $Span\{v_1,v_2\}\cap Span\{v_3,v_4\}$ והווקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 שונים זה מזה, אז הווקטורים v_1-v_2 ו- v_3-v_4 הם בת״ל.

ב. אם v_1,v_2 בת״ל וגם v_3,v_4 בת״ל, וכן $Span\{v_1,v_2\}\cap Span\{v_3,v_4\}=\{\underline{0}\}$, אז v_1,v_2,v_3,v_4 הם בת״ל.

19) אם V,W תת מרחבים של מרחב וקטורי U, ומתקיים:
$\dim U=6, \dim V=5, \dim W=3$, אז $\dim\left(V\cap W\right)$ יכול להיות:

א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. 4
ו. 5

20) V,W תת-מרחבים ממימד 3 של $I\mathbb{R}^7$, $\{w_1,w_2,w_3\}$ בסיס של W ו- $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V, אז:

א. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ בלתי תלויה לינארית.
ב. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ פורשת את $V+W$.
ג. $\{v_1+w_1+v_2+w_2+v_3+w_3\}$ בת"ל.
ד. $\{v_1+w_1+v_2+w_2+v_3+w_3\}$ פורשת את $V+W$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

21) אם A מטריצה לא ריבועית, אז בהכרח:

א. מרחב השורות של A^t שווה למרחב השורות של A.
ב. מרחב השורות של A^t שונה ממרחב השורות של A.
ג. ממד מרחב השורות של A^t שווה לממד מרחב השורות של A.
ד. ממד מרחב השורות של A^t שונה מממד מרחב השורות של A.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$. אזי בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של A.
ב. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ג. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
ד. אם $AB=2I_n$, אז בהכרח $BA=2I_n$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

23) נסמן $U = Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W = Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}\right\}$ שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$. אזי בהכרח מתקיים:

א. $U = W$

ב. $\dim U = \dim W$

ג. $U \subseteq W$

ד. אף תשובה אינה נכונה.

24) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x] = Sp(A)$. אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.

ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.

ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.

ד. A תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

25) יהי a מספר ממשי ויהיו $W = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\a\\1\end{pmatrix}\right\}$, $U = Sp\left\{\begin{pmatrix}a\\a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix}\right\}$ שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$. בהכרח מתקיים:

א. $U \cap W = \{0\}$ לכל ערכי a.

ב. $U \cap W \neq \{0\}$ לכל ערכי a.

ג. $\dim(U \cap W) = 3$ לכל ערכי $a \neq \pm 1$.

ד. $\dim(U \cap W) = 1$ לכל ערכי $a \neq \pm 1$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

26) נתונות המטריצות $R = \begin{bmatrix}2 & 5 & 5\\-1 & -1 & 0\\2 & 4 & 3\end{bmatrix}$ $T = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 6 & 9\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$. אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(T) = 1, rank(R) = 2$

ב. $rank(R^3T^5) = 1$

ג. מרחב השורות של R^3T^5 שווה למרחב השורות של T^5.

ד. $T^{100} = 0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

27) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהי $A=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ קבוצה של וקטורים מ- V $(1\le n)$. נניח בנוסף ש- $\dim(V)=n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם A בלתי תלויה ליניארית אז A פורשת את V.
ב. אם A קבוצה פורשת ל- V אז A בלתי תלויה ליניארית.
ג. ייתכנו מקרים בהם A פורשת את V, אך A תלויה ליניארית.
ד. ייתכנו מקרים בהם A בלתי תלויה ליניארית, אך A אינה פורשת את V.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

28) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות של וקטורים מ- V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.
ב. אם A,B תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cap B$ תלויה ליניארית.
ג. אם A,B בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית.
ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

29) וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3+12x^2-x+11$ ביחס לבסיס $\{2x^3+3x^2+2,x+1,x^3+x^2,2x^2+2\}$, הוא:

א. $(2,2,-2,4)$
ב. $(4,-2,-1,2)$
ג. $(2,-1,-2,4)$
ד. $(4,-1,2,2)$
ה. אף תשובה אינה נכונה.

30) תהי A מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

א. אם שורות A בלתי תלויות ליניארית אזי עמודות A בלתי תלויות ליניארית.
ב. אם שורות A בלתי תלויות ליניארית וגם עמודות A בלתי תלויות ליניארית, אזי בהכרח A מטריצה ריבועית.
ג. אם שורות A בלתי תלויות ליניארית וגם עמודות A בלתי תלויות ליניארית, אזי A מטריצה הפיכה.
ד. אם שורות A בלתי תלויות ליניארית, אזי בהכרח למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

31) נתונים תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$: $U=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a+b+c=d\}$

$W=sp\{(1,0,1,1),(0,2,1,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0)\}$

א. מצאו בסיסים וממדים עבור $U,W,U\cap W$.

ב. עבור תת מרחבים K,L של מרחב וקטורי V, הגדירו את $K+L$.

32) A מטריצה <u>לא</u> ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ פתרון יחיד, אז :

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ ללא פתרון.

ב. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

ג. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ ללא פתרון .

ד. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ עם יותר מפתרון אחד.

33) תהי A מטריצה ממשית **לא ריבועית** מסדר $m\times n$. אזי בהכרח מתקיים :

א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$, אז בהכרח $m<n$.

ב. ייתכן ש- $A^tA=I_m$ וגם $AA^t=I_m$.

ג. אם $rank(A)=m$, אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות.

ד. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

34) נתונות מטריצות ממשיות A מסדר 2×4 ו- B מסדר 4×4,
כך ש- $rank(A)=2,\quad rank(B)=3$. הוכיחו כי $AB\neq0$.

35) תהי A מטריצה ממשית מגודל $m\times n$, כאשר $m<n$.
נסמן ב- A^T את המטריצה המוחלפת. בהכרח ש :

א. מימד מרחב הפתרונות של המערכת $AX=0$ הוא $n-m$.

ב. למערכת $(A^TA)x=0$ יש אינסוף פתרונות.

ג. ייתכן מצב בו למערכת $(A^TA)x=0$ יש פתרון יחיד.

ד. ייתכן מצב בו למערכת $(AA^T)x=0$ יש פתרון יחיד.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

36) תהיינה A מטריצה מסדר 3×5 ו- B מטריצה 5×3 אז :

א. AB הפיכה אם ורק אם BA הפיכה.

ב. AB בהכרח לא הפיכה.

ג. BA בהכרח הפיכה.

ד. אם $AB=0$, אז $rank(A)+rank(B)\le5$.

37) אם A מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד, אז בהכרח:

א. A הפיכה.

ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^t פתרון יחיד.

ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

ד. מרחב העמודות A שונה ממרחב הפתרונות של A.

38) A מטריצה 3×3, כך ש- $A^2=0$ אבל $A\neq 0$, אז הדרגה של A יכולה להיות:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. אף תשובה אינה נכונה.

39) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$, אזי בהכרח מתקיים:

א. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^tx=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.

ב. ייתכן ש- $A^tA=I_n$ וגם $AA^t=I_m$.

ג. אם $rank(A)=n$, אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות.

ד. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

40) נתון כי $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$ הפיכה.

אז בהכרח:

א. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y=\alpha_{33}\end{matrix}$ פתרון יחיד.

ב. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w=-4\end{matrix}$ אינסוף פתרונות.

ג. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z=1\end{matrix}$ אין פתרון.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

תשובות סופיות

11) א	12) ב	13) א	14) ד
15) א+ד	16) ג	17) א+ג	18) הוכחה.
19) ג+ד	20) ב	21) ב+ג	22) ד
23) ב	24) ה	25) ב+ד	26) ב+ג
27) א+ב	28) א	29) ג	30) ג

31)

$$B_U=\{(-1,1,00),(-1,010),(1,001)\}$$

$$B_W=\{(100-1),(010-1),(0012)\}$$

$$U\cap W=sp\{(1,0,2,3),(0,1,2,3)\}$$

$$\dim U=3,\qquad \dim W=3,\qquad \dim(U\cap W)=2$$

32) ד	33) א+ב+ג	34) הוכחה.	35) ב+ד
36) ד	37) ד	38) ב	39) א+ג
40) ב			

תוכן העניינים:

פרק 10

מספרים מרוכבים

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b. המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\operatorname{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\operatorname{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

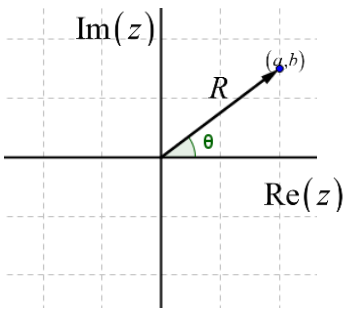
צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

מישור גאוס והצגה קוטבית (פולרית) של מספר מרוכב:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a, גודל הערך הממשי של z, וציר ה- y מייצג את b, גודל הערך המדומה של z.

מישור זה נקרא **מישור גאוס** ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a,b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R,θ). מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z=R\cos\theta+i\cdot R\sin\theta=R(\cos\theta+i\sin\theta)=R\operatorname{cis}\theta$.

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \frac{b}{a}$, $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $b = R\sin\theta$, $a = R\cos\theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1 \cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $(R\text{cis}\theta)^n = R^n\text{cis}(n\theta)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n-י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$: $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \,/\sqrt[n]{\ } \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

שאלות:

הגדרת המספר המרוכב:

1) רשום עם i :

א. $\sqrt{-1} =$ ב. $\sqrt{-4} =$ ג. $\sqrt{-25} =$

ד. $\sqrt{-3} =$ ה. $\sqrt{-5} =$

2) חשב:

א. $i =$ ב. $i^2 =$ ג. $i^3 =$

ד. $i^4 =$ ה. $i^5 =$ ו. $i^{17} =$

3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\mathrm{Re}(z)=-3$, $\mathrm{Im}(z)=2$.

ב. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו- $\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את z .

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

9) נתון: $z_1=2+3i$, $z_2=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$

ב. $z_1-z_2=$

ג. $z_1\cdot z_2=$

10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$

ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ד. $5-(3-2i)$

ה. $(i-3)+6i$

ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$

ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$

ד. $i\cdot(i-1)$

ה. $(2i+3)\cdot i$

ו. $(5i-1)^2$

12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

ידוע כי z_1+z_2 הוא ממשי וכי z_1-z_2 הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2.

ב. הראה כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

המספר הצמוד:

13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

14) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

15) נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a.

17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

18) פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

19) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$ ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

22) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$ ב. $\sqrt{8+6i}$

24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60°$ ב. $6\text{cis}135°$ ג. $4\text{cis}330°$

ד. $4\text{cis}(-30°)$ ה. $4\text{cis}690°$ ו. $8\text{cis}90°$

ז. $3\text{cis}270°$ ח. $\text{cis}180°$ ט. $\text{cis}0°$

29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. 4 ח. -1 ט. 1

י. 0

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120°\cdot 3\text{cis}60°$ ב. $\text{cis}210°\cdot 5\text{cis}(-40°)$

ג. $\frac{12\text{cis}315°}{3\text{cis}90°}$ ד. $\frac{1}{2\text{cis}40°}$

ה. $6\text{cis}30°+2\text{cis}210°$

31) נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\overline{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. iz ו. $z\cdot\overline{z}$

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\overline{z}$ ב. $z\cdot\overline{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\overline{z}^2$ ב. $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$ ב. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(36 ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

(37 משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(38 משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(39 z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\bar{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}$ ד. $z\cdot\bar{z}$

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

(40 חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $(2\text{cis}30°)^3$ ב. $(2\text{cis}14°)^5$ ג. $(1+i)^4$

ד. $(\sqrt{3}-i)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

(41 פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2=36\text{cis}120°$ ב. $z^4=(9\text{cis}80°)^2$ ג. $z^5=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(42 מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

(43 נתון המספר המרוכב $z=x+iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z|=2$

44) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z-3i|=5$.

45) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7=13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3=5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5=32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2=2-4i$.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.
ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

49) פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\operatorname{Im}(z)$.

50) פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

51) פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

54) נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\text{cis}\theta_1\cdot R_2\text{cis}\theta_2=R_1R_2\text{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)$.

56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $\left|z^4-z^3\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg\left(z\right)$.

57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\measuredangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i.

3) א. $a=2\,,\,b=5$ ב. $a=3\,,\,b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,b=-\frac{1}{2}$
ד. $a=0\,,\,b=7$ ה. $a=-4\,,\,b=0$ ו. $a=0\,,\,b=0$.

4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5) $z=1.5+2.5i$.

6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\,,\,1-2i$.

7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8) $z=2i\,,\,-3i$.

9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$.

11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$
ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

12) א. $a_1=a_2\,,\,b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0.

14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $5+3i$.

15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

16) $a=-\frac{3}{4}$.

17) שאלת הוכחה.

18) $z=4-i$.

19) $z=4+5i$.

20) $z=2-3i\,,\,w=5+i$.

21) א. $a=5\,,\,b=-3$ ב. $a=2\,,\,b=-1$.

22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

24) א. $z_{1,2}=i\ ,\ 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i\ ,\ 2-5i$.

25) $z_1=-2-5i\ ,\ z_2=3i$.

26) $z_1=-3i\ ,\ z_2=2i$.

27) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

28) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0 .

30) א. -6 ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}\left(-40°\right)$
ה. $4\text{cis}30°$.

31) א. $R\text{cis}\left(-\theta\right)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(-\theta\right)$ ג. $R\text{cis}\left(180°+\theta\right)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(180°+\theta\right)$ ה. $R\text{cis}\left(90°+\theta\right)$ ו. R^2 .

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) $1+i\ ,\ -1+i\ ,\ -1-i\ ,\ 1-i$.

36) $\sqrt{3}-i\ ,\ -1-\sqrt{3}i\ ,\ -\sqrt{3}+i$.

37) $-2\ ,\ 1-\sqrt{3}i\ ,\ 1+\sqrt{3}i$.

38) $2\ ,\ -1+\sqrt{3}i\ ,\ 1+\sqrt{3}i$.

39) א. מחוץ למעגל ב. בתוך המעגל ג. על המעגל ד. מחוץ למעגל.

40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1.

41) א. $z_0=6\text{cis}60°\ ,\ z_1=6\text{cis}240°$.
ב. $z_0=3\text{cis}40°\ ,\ z_1=3\text{cis}130°\ ,\ z_2=3\text{cis}220°\ ,\ z_3=3\text{cis}310°$.
ג. $z_0=\text{cis}12°\ ,\ z_1=\text{cis}84°\ ,\ z_2=\text{cis}156°\ ,\ z_3=\text{cis}228°\ ,\ z_4=\text{cis}300°$.

42) סכום: 0 , מכפלה: -1 .

43) $x^2+y^2=4$.

44) $x^2+\left(y-3\right)^2=25$.

45) $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$.

46) $S_{10}=100-15i$.

47) א. $a_1=2+i\ ,\ q=-2i$ ב. $S_5=20+25i$.

48) $2 , 2i , -2$ או $2 , 4-2i , 6-8i$.

49) $z_1=3-4i , z_2=-3-4i$.

50) $x=2 , -1$.

51) $z_1=0 , z_2=i , z_3=-i , z_4=1 , z_5=-1$.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) שאלת הוכחה.

56) $\arg(z)=30°$.

57) $z+iz=\sqrt{2} , -\sqrt{2}$.

58) 2θ.